数理解析研究所講究録 1259 巻 2002 年 11-13



# 閉作用素から誘導される $2\times 2$ 作用素行列について

# $2\times 2$ operator matrices induced by closed operators

九州芸術工科大学　　太田　昇一 (Schôichi Ôta)
Department of Art and Information Design,
Kyushu Institute of Design

**1.**　$T$ をヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上稠密な定義域を持つ閉作用素とする．このとき，空間 $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ 上の作用素 $\Theta_T$ を

$$\Theta_T=\begin{pmatrix} 0 & T^* \\ T & 0 \end{pmatrix}$$

で定義する:　すなわち

$$\mathcal{D}(\Theta_T)=\{\,\xi\oplus\eta\ :\ \xi\in\mathcal{D}(T),\eta\in\mathcal{D}(T^*)\,\}$$

かつ,

$$\Theta_T(\,\xi\oplus\eta\,)=T^*\eta\oplus T\xi\ .$$

この作用素 $\Theta_T$ は必ず自己共役になることが示せる．特に，$T$ が対称の時，この $\Theta_T$ はNaimarkの意味で，第2種の自己共役拡張になる（Naimark自身による第２種の自己共役拡張の存在の証明は単純ではない）ことが示せる．この講演では，閉作用素 $T$ から誘導される $2\times 2$ 作用素行列 $\Theta_T$ が常に自己共役になる事に注目して，いわゆる自己共役作用素の強可換性（spectral projectionが互いに可換）の概念を対称作用素に拡張することの可能性や，作用素 $\Theta_T$ 自身のもついくつかの性質等について報告します.

**2.**　閉作用素 $T$ に対して，$\rho(T)$ を $T$ のレゾルベント集合とする．このとき,

$$\rho(\Theta_T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:\lambda^2\in\rho(S^*S)\cap\rho(SS^*)\,\}.$$

$\lambda \in \rho(T)$ に対して，$T$ のレゾルベントを $R(\lambda,\ T)$ と書くことにする；$R(\lambda,\ T) = (\lambda - T)^{-1}$ .

このとき，各 $\lambda \in \rho(\Theta_T)$ に対して，

$$R(\lambda,\ \Theta_T) = \begin{pmatrix} \lambda R(\lambda^2,\ T^*T) & T^*R(\lambda^2,\ TT^*) \\ TR(\lambda^2,\ T^*T) & \lambda R(\lambda^2,\ TT^*) \end{pmatrix}$$

なることが簡単な計算で分かる.

3.

自己共役作用素 $S$ と $T$ が強可換の時，任意の $\lambda, \nu \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ に対して，$R(\lambda,\ T)$ と $R(\nu,\ S)$ が可換になる．これと上記の $R(\lambda,\ \Theta_T)$ の表現を考えると，$\Theta_S$ と $\Theta_T$ が強可換になることが分かる．この逆も成り立つことが示せて;

**定理 1．** $S$ と $T$ を $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とする．このとき $S$ と $T$ が強可換であることと，それらから誘導された $\Theta_S$ と $\Theta_T$ が強可換であることは同値である.

次に，$T$ を $\mathcal{H}$ 上の閉対称作用素とし，$S$ を $\mathcal{H}$ 上への自己共役拡大とすると

$$\begin{pmatrix} 0 & S \\ T & 0 \end{pmatrix}$$

は空間 $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ 上の閉対称作用素で，$\Theta_T$ と $\Theta_S$ はその拡張になっている．この事から次の定理を得る：;

**定理 2．** $T$ を $\mathcal{H}$ 上の閉対称作用素とし，$S$ を $\mathcal{H}$ 上への自己共役拡大とする．もしも $\Theta_S$ と $\Theta_T$ が強可換ならば，$T$ は自己共役で $S = T$ である.

4.

**命題 3.** $T$ を $\mathcal{H}$ 上の閉作用素とし，$\mathcal{D}(T^n)$ が $\mathcal{H}$ で稠密とする．$p(z)$ を次数が $n$ の（複素）多項式とする．さらに作用素多項式 $p(T)$ は閉作用素と仮定する．もしも $\Theta_T$ と $\Theta_{p(T)}$ が強可換ならば，

$$T(1+T^*T)^{-1}p(T)^* \subseteq p(T)T^*(1+TT^*)^{-1}\ ,$$

$$(1+T^*T)^{-1}p(T)^* \subseteq p(T)^*(1+TT^*)^{-1}\ .$$

が成り立つ.

**参考**. 上記の命題において，$T$ のレゾルベント集合が空でなければ，作用素多項式 $p(T)$ は稠密な定義域を持つ閉作用素になる．もしも，$T$ が対称作用素ならば，常に $p(T)$ は閉作用素．また，対称作用素 $T$ の不足指数のいずれかが有限なら，稠密な定義域を持つ．

命題 3 を利用すると，以下のことが示せる：

**定理 4**． $n$ を 2 以上の整数とし，$T$ を $\mathcal{H}$ 上の閉対称作用素で，$\mathcal{D}(T^n)$ が $\mathcal{H}$ で稠密とする．さらに，$n$ 次多項式 $p(z)$ が実係数をもつとする．このとき $\Theta_T$ と $\Theta_{p(T)}$ が強可換ならば，$T$ は自己共役になる．

**参考**. $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ が複素係数の多項式の場合，
$\overline{p}(z)$ を $\overline{p}(z) = \overline{a_n} z^n + \overline{a_{n-1}} z^{n-1} + \cdots + \overline{a_1} z + \overline{a_0}$ とする．このとき，

$$p(0) = 0$$

または，

$$\lambda \in \mathbb{C} \text{ such that } Im\lambda \neq 0 \quad \text{and} \quad \overline{p}(\lambda) = p(\lambda).$$

ならば，上記の定理の仮定の下，$\Theta_T$ と $\Theta_{p(T)}$ が強可換ならば，$T$ は自己共役になる．

# 参考文献

[1] V. Hardt, A. Konstantinov and R. Mennicken, On the spectrum of the product of closed operators, Math. Nachr., **215**(2000), 91–102.

[2] S. Ôta and K. Schmüdgen, Some self-adjoint $2 \times 2$ operator matrices associated with closed operators, preprint (2001)